

*Vrh oziroma konec sence navpične palice v sončnem vremenu popiše posebno krivuljo na vodoravni ravnini. Zadal sem si za nalogo, da poiščem enačbo te krivulje – enačbo sence. Naloga mi je vzela več kot deset let časa, pri čemer seveda nisem raziskoval zvezno. Končno sem izpeljal elegantno enačbo, ki je globalnega značaja – velja za vse kraje na Zemlji in za vsak dan v letu.*

*Izpeljemo jo na elementaren način s srednješolsko matematiko, vendar z znanjem vektorjev.*

*O tem sem že nekajkrat pisal. Tu na kratko ponovim, kako sem prišel do enačbe sence, ne prikažem pa izpeljav. Neke zahtevnejše stvari izpustim.*

*V bistvu gre za nekakšno poročilo o mojem raziskovanju sence, da vidite, da je pot do uspeha trda, dolga in velikokrat tudi nepredvidljiva.*

*Meni je k sreči uspelo. Kdor želi več zvedeti (na primer tri izpeljave enačbe sence), naj prebere ustrezne članke, navedene v literaturi.*

## **Trnova pot do enačbe sence**

**Teoretičen spis za mlade, ki strastno želijo raziskovati**

Da je senca od Sonca osvetljenih predmetov zanimiv naravni pojav za raziskovanje, ne bom pojasnjeval. To mora vsak čutiti v sebi, da se poda v takšne vode. Ustavil se bom le pri enem kosu svojega ukvarjanja s senco.

Enačbo sence sem vztrajno iskal več kot deset let. Ni mi žal. Večkrat mi je spodletelo in sem raziskovanje za nekaj časa opustil. Potem pa spet nadaljeval.

Senco, ki jo meče od Sonca osvetljena navpična palica na vodoravna tla, sem ogromno opazoval v naravi: na travniku, domačem vrtu, na plaži ob morju; na balkonu naše hiše kar na vodoravnem belem listu papirja itn. Krivuljo, ki jo popiše konec sence palice v različnih letnih časih, sem po opazovanju natančno narisal in jo opisoval. Vedel sem, da je krivulja hiperbola. To sem poskušal večkrat dokazati, najti enačbo hiperbole, a mi ni in ni uspelo leta in leta.

Prvič sem poskušal poiskati enačbo sence, ko sem leta 1981 pisal prispevke za revijo Pionir. Tam sem krivulje sence za poletje, zimo in enakonočje celo narisal z razlago, zakaj so takšne. Podobno sem narisal, opisal in pojasnil potek krivulj v knjigah za otroke *Astronomček Tonček* (1985) in *Opazujem Sonce in Luno* (1987).

Resneje sem se lotil iskanja enačbe sence po letu 1987. Kljub velikemu vloženemu naporu mi je ni uspelo odkriti. Iz opazovanj narisano krivuljo sem predstavljal v ustrezno izbranem pravokotnem koordinatnem sistemu v vodoravni ravnini, da bi dobil matematični izraz za krivuljo. Enačbo sem želel izpeljati elementarno z znanjem ravninske geometrije (planimetrično ali vsaj trigonometrično), a ni šlo.

Leta 1994 oktobra je bil Prvi kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Želel sem sodelovati, in to s prispevkom o senci. Začel sem senco pospešeno in poglobljeneje raziskovati. Želel sem ugotoviti njeno enačbo, predvsem elegantnejše oblike. Brskal sem po knjigah. V neki stari astronomski knjigi sem zasledil opombo, da je mogoče izpeljati enačbo sence v pravokotnem koordinatnem sistemu (v opazovalni, tj. vodoravni ravnini), vendar z uporabo enačb sferne trigonometrije. To me je zanimalo. Lotil sem se iskanja. Vse poletje 1994 sem preračunaval. Po precej zamotani poti, ki ne spade na to stran, mi je uspelo dobiti krasno enačbo sence v obliki  $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , kjer je  $a$  realna polos hiperbole,  $b$  imaginarna polos in  $m$  oddaljenost središča hiperbole od koordinatnega izhodišča, kjer je zapičena navpična palica, vse tri navedene količine  $a$ ,  $b$  in  $m$  pa so odvisne od časa oziroma natančneje od deklinacije  $\delta = \delta(t)$  Sonca med letom in zemljepisne širine  $\varphi$  kraja na Zemlji.

Nekoč sem kroženje Zemlje okrog Sonca obravnaval vektorsko. Zdaj pa sem poskušal problem obrniti. Z vektorji bi obravnaval posledico kroženja Zemlje, to je navidezno letno gibanje Sonca glede na zvezde. Ker je senca predmeta povezana tako z dnevnim kot tudi letnim navideznim gibanjem Sonca, sem to misel uporabil, da bi ugotovil enačbo sence. Vztrajal sem pri tem in uspel.

S skalarnim produktom dveh enotskih vektorjev (ki izhajata iz vrha palice, od katerih prvi kaže konstantno v severni nebesni pol, drugi pa v središče gibajočega se Sonca na nebu) sem izpeljal enačbo ploskve, pravzaprav plašča krožnega dvojnega stožca z vrhom v vrhu palice:  $(x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = (x \cos \varphi + z \sin \varphi)^2$ . Presek tega plašča z ravnino opazovanja  $z = -v$  skozi podnožišče palice pa je stožnica z enačbo (izpeljavo, ki ni preprosta, gl. v literaturi):

$$(x^2 + y^2 + v^2) \sin^2 \delta = (x \cos \varphi - v \sin \varphi)^2$$

To je slavna, vsaj zame, enačba sence. Kar ponosen sem na to izpeljavo. Nikjer nisem videl niti podobne, pa sem precej knjig prebrskal. Ta lepa, predvsem pa elegantna enačba velja splošno, za katerikoli dan v letu ( $\delta$  je deklinacija Sonca, nosi čas in se med letom spreminja) in katerikoli kraj na Zemlji ( $\varphi$  je stalna zemljepisna širina kraja). Pozitivna smer osi  $x$  je usmerjena

proti severu (ordinatna os), pozitivna smer osi  $y$  pa proti zahodu (abscisna os). Točke  $T(y, x)$  ležijo na krivulji – stožnici, ko  $x$  in  $y$  pretečeta vse vrednosti od minus neskončnosti do plus neskončnosti.

Če imamo na računalniku ustrezno matematično orodje, v gornjo enačbo odtipkamo  $\delta$  za poljubni dan v letu in  $\varphi$  za poljubni kraj na Zemlji, potem računalnik izpiše določeno krivuljo – senco za tisti dan opazovanja. Enačbo sem prikazal na plakatu ob Prvem kongresu MFA Slovenije. Vi pa jo lahko doma preskusite. Če boste odtipkali vrednosti  $\delta$  in  $\varphi$  za več dni, boste dobili več (družino) krivulj.



*Moje raziskovanje sence na našem vrtu na Javorniku pod Joštom nad Kranjem. Plastični lončki, nataktnjeni na količke, prikazujejo krivulje, po katerih se je gibal konec sence navpične palice v štirih dneh v letu. Krivulja, najbližja palici, je nastala ob opazovanju sence ob Kresu, najoddaljenejša krivulja pa okoli Božiča. Vmes sta krivulji sence ob enakonočju in sredi novembra. Poleti so krivulje sence upognjene k palici, pozimi pa stran od nje. Ob enakonočju se krivulja izrodi v premico. Krivulje sence se povsem pokoravajo ugotovljeni enačbi sence. To si štejem v velik osebni uspeh.*

Obj. v: Presek 29, 2001/2002, št. 3.



Ja, dragi moji, deset let za eno slabo vrstico. Ampak je vredno.  
Ja, ena sama ljubezen do raziskovanja. Še zdaleč ni vse – denar.  
Je še veliko dugih dragocenejših stvari v življenju.  
Prosim, nič ne recite. Od zdaj naprej bom čisto tiho.



Zlato Polje, 79 let. Foto: Maja

*Kranj, 20. 3. 2016*

*Marijan Prosen*

### **Literatura:**

(samo moji članki)

Opazuj in izmeri I do IV, Pionir 2, 4, 6, 8 (1981/82), Ljubljana.

Astronomček Tonček, MK, Lj. 1985.

Opazujem Sonce in Luno, MK, Lj. 1987

Hevreka!, Proteus 59 (1997), 456, Ljubljana.

Senca, Obzornik za matematiko in fiziko 39 (1992), 178, Ljubljana.

Enačba sence, Matematika v šoli 3, 237 (1995), Ljubljana.

Senca gnomona, Spika 2 (1994), 541, Ljubljana.

Kako do enačbe sence, Presek 29 (2001/02), 3, 144, Ljubljana.