

Iz svoje nekajdesetletne šolske prakse povem, da so se pri matematiki učenci najbolj motili pri računanju kvadrata dvočlenika. Tako je bilo seveda pred več kot 50-timi leti. Najbrž je danes stanje boljše. Ta kratek spis sem napisal za obuditev, ponovitev in utrditev te snovi. Je sicer zguljena in splošno zelo znana šolska tematika, a vseeno še vedno vredna ponovne pozornosti. Aritmetični razlagi kvadrata dvočlenika sem dodal še geometrijsko, da bo razlaga popolna. Nekateri geometrijske razlage sploh niso nikoli slišali. Vse je v redu, četudi je takšna vsebina na spletu. Ima samo dober namen in poskuša povedati, da smo z matematiko prepleteni praktično vse življenje.



Kvadrat dvočlenika

Za samouke in vse tiste, ki so to snov že pozabili

Veliko učencev si ne more in ne more zapomniti pravila, kako izračunamo kvadrat dvočlenika (binoma), to je kvadrat vsote ali razlike dveh členov (števil). Na vprašanje, koliko je $(x + y)^2$, kar bleknejo $x^2 + y^2$. To pa je velika napaka, včasih tako velika ali celo tako usodna, da padejo na popravnem izpitu in ne izdelajo razreda (vsaj tako je bilo včasih).

Če želimo izračunati kvadrat dvočlenika, moramo dvočlenik pomnožiti s samim seboj, torej

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

To velja za kvadrat vsote dveh členov. Za kvadrat razlike dveh členov pa je

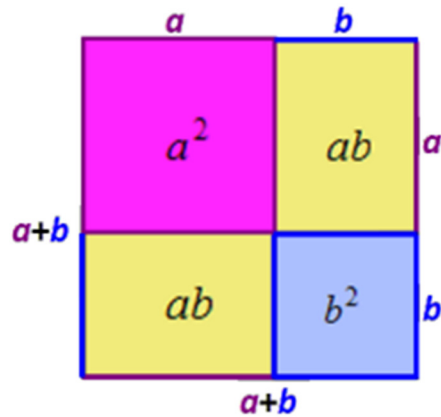
$$(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Kvadrat dvočlenika je enak kvadratu prvega člena plus ali minus dvakratnemu produktu prvega in drugega člena plus kvadratu drugega člena. To pravilo je mogoče z besedami povedati še drugače, kar lahko poskusite sami. Kvadrat dvočlenika je torej tričlenik. Prvi in tretji člen tega tričlenika sta vedno pozitivna, drugi člen pa je pozitiven ali negativen glede na to, če kvadriramo vsoto ali razliko členov.



Kvadrat dvočlenika lahko prikažemo še na geometrijski način, tj. s sliko. Pokazali bomo dokaz za vsoto in razliko dveh členov.

Z a označimo dolžino prve daljice, z b dolžino druge. Narišimo kvadrat s stranico $(a + b)$ in ga razdelimo tako, kakor kaže slika spodaj.

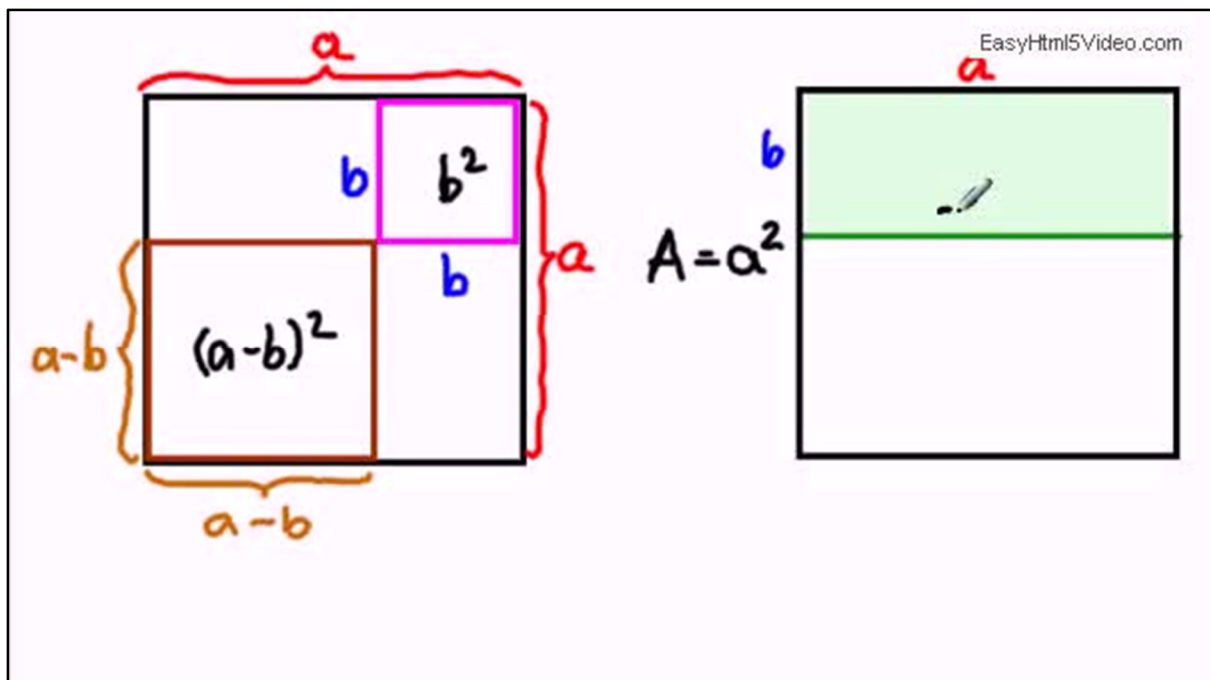


Geometrijska razlaga kvadrata vsote dveh členov:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Kvadrat s stranico $(a + b)$ je razpadel na dva kvadrata, in sicer na kvadrat s stranico a in kvadrat s stranico b , tj. $a^2 + b^2$, ter dva ploščinsko enaka pravokotnika s stranicama a in b , tj. $ab + ab = 2 ab$.

Ploščina kvadrata s stranico $(a + b)$ je torej enaka vsoti ploščin kvadratov s stranicama a in b ter dvakratni ploščini pravokotnika s stranicama a in b .



Geometrijska razlaga kvadrata razlike dveh členov:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Poskusite si dokaz pojasniti sami. Uporabiti je treba le malo logike.

•

Vse, kar smo tu povedali, je tako preprosto, da si z lahkoto zapomnimo za vedno. Navedimo še nekaj zgledov.

$$\begin{aligned}
\heartsuit (2a + b)^2 &= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 \\
\heartsuit (\sqrt{3} + 2)^2 &= (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 2^2 = 3 + 4 \cdot \sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3} \\
\heartsuit (x^5 - 3)^2 &= (x^5)^2 + 2 x^5(-3) + (-3)^2 = x^{10} - 6 x^5 + 9 \\
\heartsuit 27^2 &= (20 + 7)^2 = 400 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 49 = 729
\end{aligned}$$

Predlagam, da izračunate:

1. a) $(3a + b)^2$; b) $(x^2 + y^2)^2$; c) $(\sqrt{2} + 3)^2$
2. a) 38^2 (na dva načina, brez računalnika); b) 107^2 (na dva načina, brez računalnika)
3. $(2x - 5y)^2$

R.:

1. a) $9a^2 + 6ab + b^2$; b) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$; c) $11 + 6\sqrt{2}$.
3. $4x^2 - 20xy + 25y^2$.

Ta spis sem napisal zato, ker v kakšnem svojem prispevku uporabim kvadrat dvočlenika, tu pa najdete razlago zanj. S seboj nosi pozitivno energijo.

Kranj, 3. 5. 2016

Marijan Prosen