Kaj je več?

Za mlade raziskovalce matematike od 7. razreda osnovne šole dalje

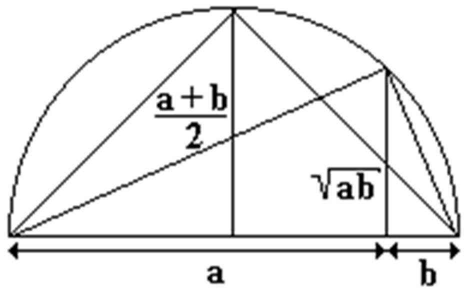
Recimo, da poznamo dve različni realni pozitivni števili $a > 0$ in $b > 0$. Izrazu $(a+b)/2$ rečemo aritmetična sredina števil a in b, izrazu $\sqrt{(ab)}$ pa geometrijska sredina števil a in b.

Zdaj pa nas zanima, kaj je več: ali $(a+b)/2$ ali $\sqrt{(ab)}$. Na pamet ali takoj tega ne znamo odgovoriti. Poglejmo, kako je s to rečjo.

Zapišimo razliko: $(a+b)/2 - \sqrt{(ab)} = (a - 2\sqrt{(ab)} + b)/2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2/2$.
Zapisani dvočlenik v oklepaju je vedno pozitiven (zakaj že), zato velja, da je

$$(a+b)/2 - \sqrt{(ab)} > 0 \quad \text{in nadalje} \quad (a+b)/2 > \sqrt{(ab)}.$$

Dokazali smo, da je aritmetična sredina dveh pozitivnih realnih števil vedno večja od geometrijske sredine istih dveh števil. To velja splošno. Zdaj vemo to na pamet. Dokaz je kratek, jedrnat in zelo učinkovit.



Geometriski dokaz, da je $(a+b)/2$ več kot $\sqrt{(ab)}$. Sliko si velja dobro zapomniti. Premer krožnice je enak vsoti daljic a+b, polmer pa polovični vrednosti – aritmetični sredini daljic $(a+b)/2$, kar je tudi višina v enakokrakem pravokotnem trikotniku, včrtanim v polkrožnici. Geometrijsko sredino daljic pa narišemo po višinskem izreku $a:v = v:b \rightarrow v^2 = ab \rightarrow v = \sqrt{(ab)}$, če je v višina v drugem pravokotnem trikotniku, včrtanim v polkrožnici. S slike se očitno razbere, da je $(a+b)/2$ več kot $\sqrt{(ab)}$. Tudi ta geometrijski dokaz je kratek, a zelo učinkovit.

Še nekaj vaj:

Dokažite, da je aritmetična sredina dveh števil večja od geometrijske za naslednje pare števil:
a) 4 in 16; b) 36 in 25; c) 11 in 13; č) 999 in 1001; č) $\sqrt{2}$ in $\sqrt{3}$. Kjer se vam zdi potrebno, uporabite žepni računalnik. Vse lahko narišete. Znajdite se in bodite natančni.

Kranj, Zlato Polje, 2. 5. 2016 ***Marijan Prosen***