V tem kratkem spisu pokažemo, kako preoblikujemo številski izraz, da potem z lahkoto ugotovimo njegov ekstrem, to je njegovo največjo ali najmanjšo vrednost.

Dopolnjevanje številskega izraza do (popolnega) kvadrata dvočlenika

Za devetošolce.

Dvočlenik, oblike $ax^2 + bx$, ali tričlenik, oblike $ax^2 + bx + c$, kjer so a, b in c poljubna realna števila, moremo preoblikovati v (popolni) kvadrat dvočlenika in še nekaj ostane. To, kar ostane, je konstanta (neko število), ki pove največjo ali pa najmanjšo vrednost (ekstrem) izraza. Oglejmo si omenjeno preoblikovanje izraza na zgledu.

♥ Dopolnimo do kvadrata dvočlenika izraz $x^2 + 6x$.

Najprej je $x^2 = x \cdot x$ in $6x = 2 \cdot 3 \cdot x$. Če želimo dani izraz dopolniti do kvadrata dvočlenika, moramo najprej ugotoviti, da je prvi člen dvočlenika enak x. Da bi dobili drugi člen dvočlenika, je treba koeficient 6 pri 6x deliti z 2 (zakaj?), torej 6:2 = 3 in 3 je drugi člen dvočlenika. Zdaj tri kvadriramo. Dobimo $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ in prvotnemu izrazu prištejemo in hkrati odštejemo 9, da se izraz nič ne spremeni.

Torej:
$x^2 + 6x + 9 – 9$. Prve tri člene združimo v $(x + 3)^2$. Tako dobimo rezultat

$$(x + 3)^2 – 9.$$

Prvotni izraz $x^2 + 6x$ smo preoblikovali v izraz $(x + 3)^2 – 9$, kjer je $(x + 3)^2$ (popolni) kvadrat dvočlenika x + 3, – 9 pa je tisto (konstanta), čemur smo rekli, da še nekaj ostane.

Oblika izraza $(x + 3)^2 – 9$ je zelo zanimiva in pripravna. Iz nje lahko na primer hitro ugotovimo, da za vrednost x = – 3, izraz doseže najmanjšo vrednost (minimum), ki znaša – 9. Preskusite, kar sem pravkar zapisal. Prepričajte se o tem.

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = \underbrace{x^2 + 2x}_{\text{ENAKO}} + 3 =$$

Kateri popolni kvadrat se začne z $x^2 + 2x$?

$$= \underbrace{(x+1)^2 - 1}_{\text{ENAKO}} + 3 = (x+1)^2 + 2$$

♥ Dopolnimo do kvadrata dvočlenika izraz $x^2 – 3x + 3 = x^2 – 3x + (3/2)^2 – (3/2)^2 + 3 = (x – 3/2)^2 – 9/4 + 12/4 = (x – 3/2)^2 + 3/4$. Ta izraz za $x = 3/2$ doseže najmanjšo vrednost (minimum), ki je ¾.

♥ Dopolnimo do kvadrata dvočlenika izraz $2x^2 + 5x – 1$. Izpostavimo 2. Tako je $2(x^2 + (5/2)x) – 1 = 2(x^2 + (5/2)x + (5/4)^2 – (5/4)^2) – 1 = 2(x + 5/4)^2 – 25/8 – 8/8 = 2(x + 5/4)^2 – 33/8$. Izraz ima za $x = –5/4$ minimum, ki znaša $– 33/8$.

♥ Za katero vrednost x doseže izraz $– x^2 + 8 x – 10$ največjo vrednost in koliko znaša?

Izpostavimo minus, torej $– (x^2 – 8x + 16 – 16) – 10 = – (x – 4)^2 + 6$.
Gornji izraz doseže za $x = 4$ največjo vrednost (maksimum), ki je 6.

Sami ste gotovo že opazili tole: če je koeficient (število) pri x^2 pozitiven, izraz doseže minimum, če pa je koeficient pri x^2 negativen, izraz doseže maksimum.

Za utrditev snovi predlagam naslednje naloge:

1. Dopolnite do (popolnega) kvadrata dvočlenika izraze: a) $x^2 + 4x – 2$; b) $x^2 – x$; c) $2x^2 + 12x + 19$
2. Za katero vrednost x doseže izraz $x^2 – 10 x$ najmanjšo vrednost in koliko znaša?
3. Za katero vrednost x doseže izraz $– x^2 – 8 x + 14$ največjo vrednost in koliko je ta vrednost?

R.:
1. a) $(x + 2)^2 – 6$; b) $(x – ½)^2 – ¼$; c) $2(x + 3)^2 + 1$
2. $(x – 5)^2 – 25$; za $x = 5$ ima izraz najmanjšo vrednost $– 25$.
3. $– (x + 4)^2 + 30$; za $x = – 4$ ima izraz največjo vrednost 30.

Še sami si izmislite kakšno nalogo. Kdor bo nadaljeval šolanje na srednji šoli in naprej, bo uvidel, kako vsestransko uporabno je to dopolnjevanje (pri kvadratni funkciji, v analitiki, višji matematiki, itn.). Zato je vredno, da se ga dobro naučimo. V pomoč je tudi ta kratek, a poučen spis.

Kranj - Zlato Polje, 17. 10. 2016 *Marijan Prosen*