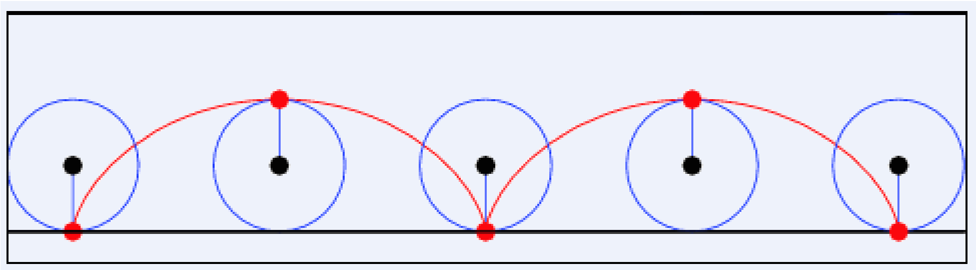
Cikloida

Splošno izobraževalni preprost matematični spis z raziskovalno noto; raziskovanje je odprto, kdorkoli želi, lahko raziskuje.

Cikloida je krivulja, tesno povezana s krožnico oziroma s krogom (ciklom). Je ravninska krivulja. Cikloido opiše kaka točka krožnice, če se krožnica (enakomerno) kotali brez spodrsavanja po premici. Z njo sta se ukvarjala nemški kardinal, filozof, matematik in astronom Nikolaj Kuzanski (1401–1464) in pozneje francoski matematik, fizik, filozof in muzikolog Marin Mersenne (1588–1648). Dejansko pa jo je odkril in zanjo predlagal tudi ime (1599) veliki italijanski fizik in astronom Galileo Galilei (1564–1642).

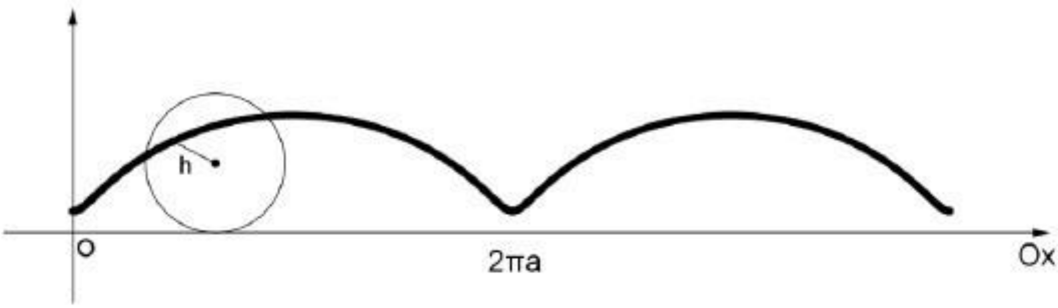
Je krivulja, ki zelo pogosto nastopa v matematiki (geometriji). Pravi čudež je, da je niso odkrili že antični matematiki. Jaz sem prvič slišal zanjo na Proseminarju matematike v prvem letniku na univerzi v Ljubljani (spomladi leta 1956) pri akademiku profesorju dr. Ivanu Vidavu. Spis je torej tudi nek moj spomin na ta dogodek.



Nastanek cikloide; pri kotaljenju krožnice po premici v desno se izbrana rdeča točka (pika) na krožnici giblje po cikloidi – rdeči krivulji na sliki. Ko se krožnica zakotali za en svoj obseg, točka opiše ravno en "hrib", to je od začetka hriba na eni strani mimo vrha in nato do podna na nasprotni strani hriba. Ta krivulja doseže največjo vrednost (maksimum, ki je enak dvema polmeroma, to je premeru krožnice), ko se krožnica zakotali za polovico svojega obsega. In kako se pri tem kotaljenju giblje središče krožnice? Poglej! Slika vse to pove in še več.

Po odkritju so jo začeli množično raziskovati. Reševali so najrazličnejše naloge v zvezi s to krivuljo: enačba cikloide, tangenta na cikloido, dolžina loka pri kotaljenju za polni obseg krožnice (dolžina rdeče obarvane krivulje med dvema zaporednima točkama na premici, dolžina pri hoji čez hrib), ploščina pod tem lokom itn. Teh nalog je res veliko. Mi se ne bomo ukvarjali z njimi, saj segajo celo na nivo višje matematike.

Omenili pa bomo *skrajšano cikloido*. Nastane na enak način kot cikloida, le točke ne izberemo na krožnici, ampak nekje na polmeru proti središču krožnice (torej v notranjosti kroga). Tako nastane skrajšana cikloida – krivulja, ki jo kaže spodnja slika.



Skrajšana cikloida; točka je izbrana približno za h = ⅓ a od oboda kroga (krožnice) proti središču krožnice; a – polmer (radij) krožnice, 2πa – obseg krožnice. *Sliki sta s spleta.*

* * *

1. Vzemi kolo, nariši točko (zabij žebelj) na njegovem obodu (krožnici) in kolo počasi kotali po ravnih vodoravnih tleh. V naravi (dvorišču, igrišču itn.) opazuj gibanje te točke (žeblja) po krivulji – cikloidi! Najbolje je, da ta poskus delata dva. Eden kotali kolo z žebljem, drugi pa z določene oddaljenosti opazuje kotaljenje in gibanje žeblja. Nato zamenjata vlogi. Nalogo lahko izvedeš tudi ponoči. Namesto žeblja tam prilepiš majhno baterijo s prižgano lučjo. Opazuješ gibanje svetila. Poskus spet opravljata dva.

2. Raziskovalna naloga. Na večji bel papir nariši krožnico s poljubnim polmerom a (ali iz kartona natančno izreži ustrezno velik krog in ga položi na papir) in znotraj nje izberi točko: a) na razdalji ¼ a od krožnice; b) na razdalji ½ a od krožnice; c) na razdalji ¾ a od krožnice in d) v središču krožnice. Poskusi raziskati, to je narisati, kako se v vsakem od teh primerov giblje točka pri kotaljenju krožnice po premici.

Namig: Dobiš tri različne skrajšane cikloide z vedno višjimi in bolj ovalnimi minimumi (plitvimi dolinicami) in vedno nižjimi in bolj razpotegnjenimi maksimumi (kopastimi hribčki), v četrtem primeru d) pa se skrajšana cikloida izrodi v premico (minimumi in maksimumi preprosto izginejo). Pojasni! Gl. prvo sliko! Kako je z višino maksimumov in globino minimumov, koliko merijo in kaj se dogaja z njimi, ko izbrano točko jemljemo vedno bližje središču krožnice? Raziskovanje teh cikloid je prav zanimivo in tudi zelo poučno, saj skrivajo v sebi številne lastnosti.

Kranj – Zlato Polje, 15. 6. 2017 ***Marijan Prosen***