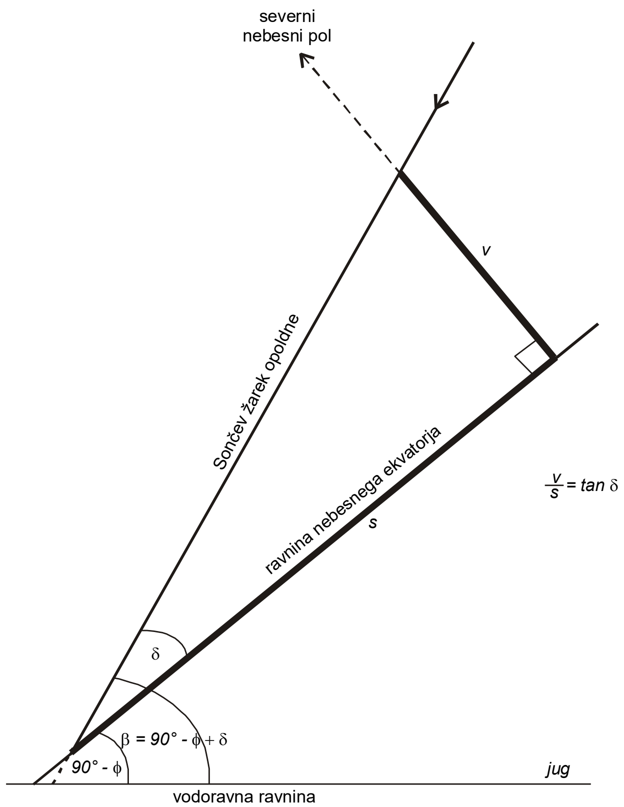
Polmer neke krožnice

Raziskovalna naloga za devetošolce naše osnovne šole.

Zadajmo si nalogo, da izračunamo dolžino sence, ki jo od Sonca osvetljena ravna palica, usmerjena proti severnemu nebesnemu polu, opoldne meče na ekvatorialno ravnino, to je ravnino, ki leži v ravnini nebesnega ekvatorja, v kraju s severno geografsko širino $\varphi \geq 0$ določenega dne v letu, ko je deklinacija δ Sonca znana. Za deklinacijo Sonca velja omejitev: $-23{,}5^{o} \leq \delta \leq +23{,}5^{o}$, kar pomeni, da med letom leži med vrednostma $-23{,}5^{o}$ in $+23{,}5^{o}$.

Ekvatorialna ravnina oklepa z vodoravno ravnino kot $(90^{o} - \varphi)$. Palico z višino oz. dolžino v torej zapičimo navpično v ekvatorialno ravnino tako, da njen vrh kaže v severni nebesni pol (približno proti Severnici).



Opoldanska dolžina s sence od Sonca osvetljene in v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na ekvatorialno ravnino; senca palice je samo, ko je Sonce nad ekvatorialno ravnino ($\delta > 0$), ob enakonočjih ($\delta = 0$) je neopredeljena, ko pa je Sonce pod to ravnino ($\delta < 0$), do sence sploh ne more priti.

S slike izračunamo, da je opoldanska dolžina sence:

$$s = v/\text{tg}\ \delta.$$

Dolžina sence je neodvisna od φ in je za negativne vrednost δ ni. Poglejmo, kaj pove gornja enačba.

To, da je neodvisna od geografske širine φ, pomeni, da je določenega dne v letu v vseh krajih severne Zemljine polute in krajih na ekvatorju opoldanska dolžina sence enako dolga.

Ob enakonočju ($\delta = 0$) je dolžina sence neopredeljena za vse φ ($\mathrm{tg}\ \delta = 0$ in sledi $s \rightarrow \infty$).

Pri nas ($\varphi = 45°$) je palica usmerjena postrani pod kotom 45° proti vodoravni ravnini.

V krajih na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je palica usmerjena vodoravno proti severne nebesnem polu, ekvatorialna ravnina je navpična.

Na severnem Zemljinem polu ($\varphi = 90°$) je palica usmerjena navpično proti severnemu nebesnemu polu, ekvatorialna ravnina je vodoravna.

Povsod pa je dolžina sence istega dne enako dolga, kar smo že povedali.

Če je Sonce pod ravnino nebesnega ekvatorja ($\delta < 0 \rightarrow \mathrm{tg}\ \delta < 0$) je dolžina sence negativna (dolžina ima vedno pozitivno vrednost), sence ni, ne more priti do sence, saj Sonce sploh ne osvetljuje palice.

Nekoliko se še poglobimo v dano situacijo. Izračunana opoldanska dolžina sence palice je pravzaprav polmer r krožnice, po kateri se določenega dne v letu (ko ima deklinacija Sonca δ določeno – znano vrednost) giblje konec oziroma vrh sence palice. Po krožnici kroži s kotno hitrostjo 360°/24 h = 2π radianov/ 24 h =15°/h = $(\pi/12)$/h, kar je kotna hitrost navideznega vrtenja neba. To zakonitost uporabljamo pri izdelavi ekvatorialne sončne ure. Senca palice s središčem v podnožišču palice se s to enakomerno kotno hitrostjo premika (pometa) po ekvatorialni ravnini, v kateri leži številčnica sončne ure, in lega (smer) sence kaže čas. Odvisno od dneva (δ) je dolžina sence (polmer krožnice) enkrat daljša, drugič krajša, ob enakonočjih pa seveda neopredeljena. Ura deluje le, ko pada senca na ekvatorialno ravnino, to je od spomladanskega enakonočja do jesenskega, torej spomladi in poleti, ko je Sonce nad ekvatorialno ravnino, jeseni in pozimi pa ne, saj je pod njo. (Seveda lahko ekvatorialno sončno uro tako preuredimo, da deluje tudi jeseni in pozimi, a pustimo zdaj to možnost, ker nas zanima le senca palice na zgornjem delu ekvatorialne ravnine).

Dolžina sence oziroma polmer krožnice zavzame najmanjšo vrednost ob poletnem Sončevem obratu ($\delta = 23{,}5°$), vse druge dneve pa je daljša in ob enakonočjih zavzame neskončno vrednost (je neopredeljena), kar vse sledi iz enačbe za dolžino sence.

Bilo je veliko govora za majno stvar, ki je razumljiva že sama od sebe.

Ω

• Izračunajmo dolžino sence (polmer r krožnice) en metrske palice za dan poletnega solsticija. Deklinacija Sonca $\delta = 23{,}5°$.

s = r =1/tg 23,5° = 2,3 m; dolžina sence (radij krožnice) je ta dan za vse kraje severne geografske šine in kraje na Zemljinem ekvatorju enaka. Poglejmo še, s kolikšno hitrostjo se premika konec oz. vrh sence te palice. Hitrost točke na krožnici je v = kotna hitrost × r = (π/12)/h × 1 m = 0,26 m/h, torej približno ¼ metra na uro ali 4,4 mm/min.

Ω

Naloge:

1. Izračunajte opoldansko dolžino sence (polmer r krožnice) en metrske palice, usmerjene v severni nebesni pol, na ekvatorialni ravnini, za naslednje dni: 1.4., 1.5., 1.6., 1.7.; 1.8.; 1.9., in 1.10. Podatke za deklinacijo Sonca v teh dneh dobite v astronomskih efemeridah (gl. nalogo 3) ali pa na internetu.

2. Narišite graf $s = 1/\operatorname{tg}\delta$, ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence naše metrske palice na ekvatorialni ravnini za čas od spomladanskega do jesenskega enakonočja. Sestavite tabelo: **čas (datum)** | ***s*** oziroma tabelo **δ** | ***s*** in nato narišete graf.

Pri risanju grafa seveda velja omejitev: $-23{,}5° \leq \delta \leq +23{,}5°$. Vendar graf narišete le za $\delta > 0$. Rišete ga od točke do točke, npr. za vsak deseti dan. Pomagate si z astronomskimi efemeridami *Naše nebo*, ki jih vsako leto izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (tu dobimo podatke za deklinacijo Sonca) in kalkulatorjem. Dobite krivuljo, ki ima minimum ob poletnem Sončevem obratu, ob enakonočjih pa gre v neskončnost (je neopredeljena, krivulja se pretrga). Naloga je čudovita.

3. S kolikšno hitrostjo se giblje konec (vrh) sence naše palice z dolžino 2 m po ekvatorialni ravnini dne 12. 5. ($\delta = 18{,}1°$)? [1,6 m/h]

Kranj – Zlato Polje, 1. 7. 2017 ***Marijan Prosen***