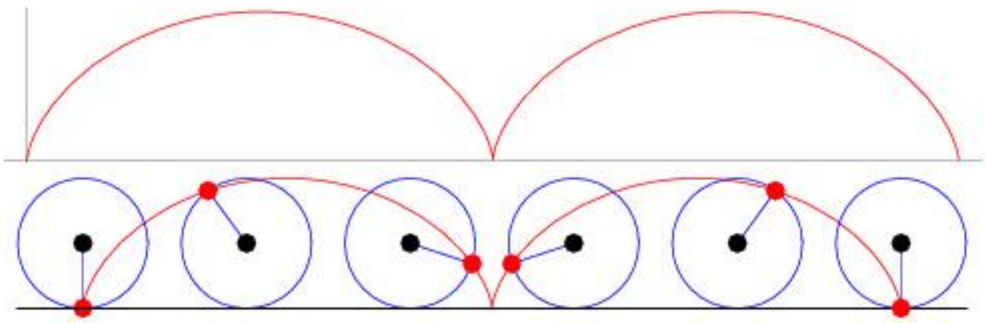
Tangenta na cikloido

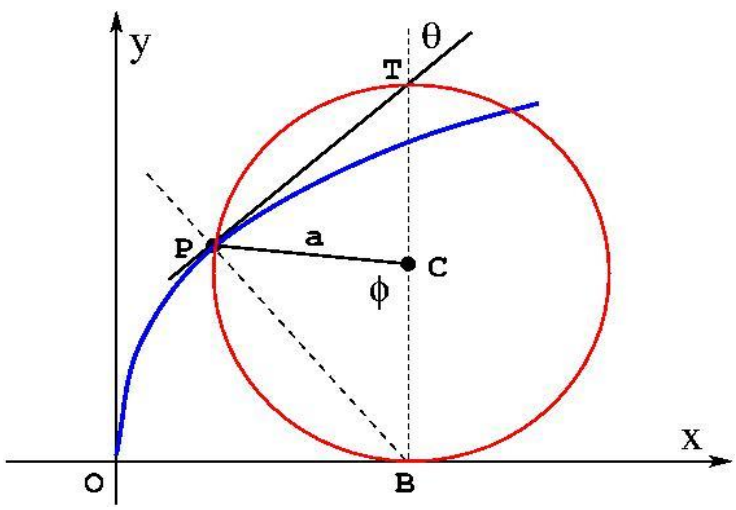
Cikloida je ravninska krivulja, ki jo opiše kaka trdna točka krožnice, ko se enakomerno in brez spodrsavanja kotali po premici. Točka krožnice je obarvana rdeče, središče krožnice pa črno. Krožnica se enkrat zakotali, ko središče krožnice prepotuje obseg krožnice (2πr, če je r radij krožnice), točka na krožnici pa opiše lok (z dolžino 8 r) oz. popiše en "hrib" z največjo vrednostjo na sredini (maksimumom) 2r. Cikloida je periodična funkcija s periodo 2π ali 360°.



Nastanek cikloide; hitrost točke na krožnici (na obodu kroga) je enaka hitrosti središča krožnice.

Po odkritju in poimenovanju (Galilei, 1599) so jo začeli množično raziskovati. Odkrili so veliko njenih lastnosti. Sredi 17. stoletja se je pokazala posebno zanimiva naslednja naloga:

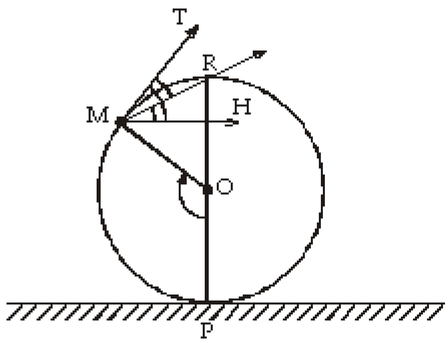
S šestilom in ravnilom v določeni točki cikloide nariši tangento na cikloido.

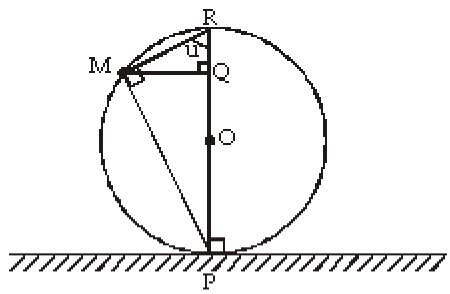


Tangenta na cikloido v točki P – to je premica, ki jo konstruiramo z ravnilom in šestilom, in narišemo kozi točki P in T; Φ – kot, ki ga je opisal radij a v času, ko se je krožnica zakotalila za dolžino ustreznega loka.

Naj bo točka P hkrati na cikloidi in krožnici. V šestilo vzamemo znan polmer a krožnice in ga od P odmerimo na vzporednici, ki je za a odmaknjena od osi x. Dobimo središče krožnice C. S šestilom narišemo krožnico s središčem v C in z radijem a. Iz dotikališča krožnice z osjo x (podnožišča) B krožnice narišemo skozi C pravokotnico na os x. Njen podaljšek seka krožnico v točki T. Narišemo premico skozi točki P in T. Premica skozi točki P in T je iskana tangenta na cikloido v točki P.

Poglejmo še vektorski način risanja tangente na cikloido.





Naj bo M lega poljubne točke, ki je hkrati na krožnici in cikloidi. Naj se krožnica kotali po premici z enakomerno hitrostjo v; v je hkrati hitrost točke M na krožnici (obodna hitrost) in hitrost središča O krožnice v smeri abscisne osi. Hitrost je vektor – ima smer in absolutno vrednost. V točki M je treba sestaviti vektor v_1 = vektor MH v smeri abscisne osi in vektor v_2 = vektor MT, ki se dotika dane krožnice v točki M in je pravokoten na polmer OM. Vektorja imata različno smer, a enako absolutno vrednost. Kot HMT razpolovimo. Simetrala MR tega kota je tangenta na cikloido v točki M. Če pa sestavimo (narišemo) še rezultanto obeh vektorjev po pravilu o sestavljanju (seštevanju) vektorjev, pa dobimo hitrost, s katero se giblje točka M na cikloidi. Absolutno vrednost hitrosti in njeno smer lahko izmerimo (z ravnilom in kotomerom) ali izračunamo.

Še enostavneje. Iz središča O krožnice narišemo pravokotnico na premico. Ta pravokotnica preseka krožnico v točkah P in R. Tangenta na cikloido gre skozi M in R.

Torej: Skozi vsako točko cikloide poteka premica, ki gre skozi vrhnjo točko krožnice v določeni legi in se dotika cikloide.

* * *

1. Vzemi kolo, dobro označi točko na obodu (na krožnici), ga zakotali po ravnih tleh in v naravi opazuj gibanje te točke po cikloidi.
2. Nariši tangento na cikloido v dani točki A na dani krožnici s polmerom r = 3 cm.

3. Hitrost točke na cikloidi je v =5 m/s (dolžina tangente na cikloido je 5 cm), kot α = kot HMR je: a) 90°, b) 60°, c) 45°, č) 30° in d) 0°. S kolikšno hitrostjo se giblje krožnica kot celota (= središče krožnice) po premici (ravnih tleh)? Opomba. Hitrost središča krožnice je konstantna, hitrost točke na krožnici, ki je hkrati na cikloidi, pa ne. Spreminja se od 0 m/s (v dotikališču P krožnice s premico - spodaj) do 2v m/s (v diametralni točki dotikališča R– zgoraj), če z v označimo hitrost središča krožnice (gl. sliko 2).

   [Izmerimo ali izračunamo dolžino iskanega vektorja hitrosti v smeri gibanja (daljico): a) v = 0 m/s, b) v = 5 m/s, c) $v/\sqrt{2}$ m/s = 3,5 m/s, č) $v/\sqrt{3}$ m/s = 2,9 m/s in d) ½ v m/s = 2,5 m/s.]

Kranj – Zlato Polje, 24. 6. 2017 ***Marijan Prosen***