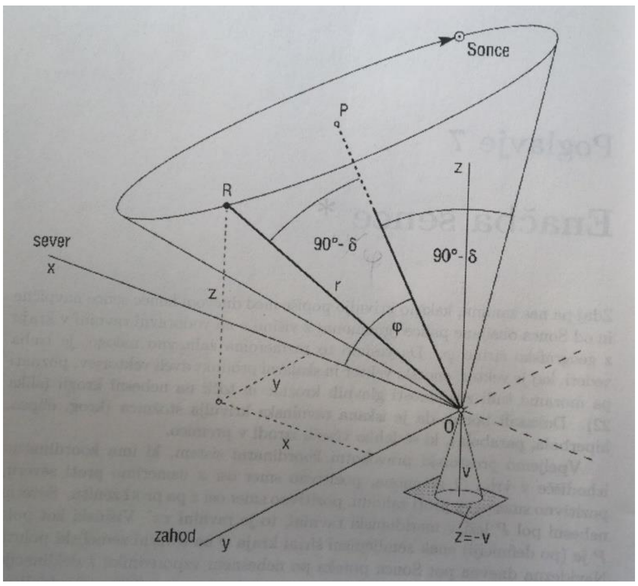
S senco, ki jo od Sonca osvetljeni predmeti, predvsem ravna palica, mečejo na različne ravnine, sem se res veliko ukvarjal (1981-2017). Tu navajam del svojih raziskav, in sicer svojo izpeljavo krivulje, po kateri se med dnevom premika konec (vrh) sence od Sonca osvetljene ravne palice v treh značilnih ravninah, v vodoravni, navpični in ekvatorialni. Ogromno razmišljanj, poskušanj in kar nekaj matematičnega dela je bilo treba vložiti za določitev teh krivulj. Do danes še nisem ugotovil, da bi senco, ki jo meče ravna palica na te tri ravnine kdo tako obravnaval, kot jo sam obravnavam. To izpeljavo sem torej odkril, izpeljal z vektorji na osnovi srednješolske matematike, zato jo tudi ustrezno zavarujem pod simbolom ©.

Moja izpeljava enačbe sence

v vodoravni, navpični in ekvatorialni ravnini ©

Vzemimo, da nas najprej zanima, kakšno krivuljo med dnevom popiše konec (vrh) sence navpične od Sonca osvetljene palice (gnomona) z višino v na vodoravni ravnini v kraju (opazovališču) z geografsko širino $\varphi \geq 0$ določenega dne v letu, ko je deklinacija δ Sonca znana. Za kraje v Sloveniji je φ blizu 45°, deklinacija Sonca pa se spreminja v mejah od $-23{,}5^{\circ}$ do $+23{,}5^{\circ}$.



K izpeljavi enačbe plašča krožnega dvojnega stožca, katerega os gre skozi severni nebesni pol *P*. Presek tega plašča in vodoravne ravnine skozi podnožišče palice (gnomona; tukaj pokončnega stožca) je stožnica, ki je pri nas v splošnem hiperbola, v drugih krajih pa tudi krožnica, elipsa ali parabola. Ta plašč krožnega dvojnega stožca pa preseka tudi navpično in ekvatorialno ravnino, s čimer dobimo kot presek spet stožnice.

Dokazali bomo, da je iskana ravninska krivulja stožnica (krožnica, elipsa, hiperbola, parabola), ki se včasih, to je ob enakonočjih, izrodi v premico.

Vpeljimo prostorski pravokotni koordinatni sistem, ki ima koordinatno izhodišče v vrhu O palice (gnomona), pozitivno smer osi x usmerimo proti severu, pozitivno smer osi y proti zahodu, pozitivno smer osi z pa proti zenitu. Tako severni nebesni pol P leži v meridianski ravnini, to je ravnini (xz). Višinski kot pola P je (po definiciji) enak geografski širini kraja φ na severni Zemljini poluti. Navidezna dnevna pot Sonca poteka po nebesnem vzporedniku z deklinacijo δ, to je po nebesnem vzporedniku, katerega točke so za kot ($90^o - \delta$) oddaljene od P. Sončevi žarki, ki gredo med dnevom čez vrh palice, ležijo na plašču krožnega stožca, katerega os gre skozi P. Kot med vektorjem $\boldsymbol{OP}$ in vektorjem $\boldsymbol{OR} = \boldsymbol{r} = (x,y,z)$ Sončevega žarka je ($90^o - \delta$).

Naj bo na vektorju $\boldsymbol{OP}$ enotski vektor $\boldsymbol{e} = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$, na vektorju $\boldsymbol{OR}$ pa enotski vektor $\boldsymbol{f} = (x, y, z)/r$. S skalarnim produktom teh dveh enotskih vektorjev dobimo enačbo ploskve – plašča krožnega dvojnega stožca. Najprej velja $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{f} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^o - \delta) = \sin\delta$, hkrati pa je $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{f} = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi) \cdot (x, y, z)/r = x\cos\varphi/r + z\sin\varphi/r$.

Iz izenačenja $x\cos\varphi/r + z\sin\varphi/r = \sin\delta$, sledi $r\sin\delta = x\cos\varphi + z\sin\varphi$. Zapisano enačbo kvadriramo, upoštevamo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, in dobimo:

$$(x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\delta = (x\cos\varphi + z\sin\varphi)^2.$$

To je enačba plašča krožnega dvojnega stožca z odprtino $2 \cdot (90^o - \delta)$. Presek tega plašča z vodoravno ravnino, vzporedno z ravnino (xy), pa je stožnica. Enačbo stožnice, to je krivulje, ki jo tekom dneva na vodoravni ravnini popiše konec (vrh) sence naše palice (pokončnega stožca), dobimo s presekom plašča krožnega dvojnega stožca in vodoravne ravnine z enačbo $z = -v$.

1. Krivulja, ki jo določenega dne (δ) popiše konec sence palice na vodoravni ravnini v kraju z geografsko širino φ, ima enačbo:

$$\boldsymbol{(x^2 + y^2 + v^2)\sin^2\delta = (x\cos\varphi - v\sin\varphi)^2}$$

To je iskana enačba sence v vodoravni ravnini, vzporedni z (xy) ravnino. O tej enačbi lahko razpravljamo za različne geografske širine $\varphi \geq 0$ (različne kraje) in za različne deklinacije δ Sonca (različne datume). Enačba je torej splošno veljavna za vsak kraj $\varphi \geq 0$ in čas na Zemlji.

2. Namesto vrha O navpične palice z višino v si lahko mislimo vrh vodoravne palice z dolžino d, ki jo navpično zapičimo v navpično ravnino vzhod-zahod. Enačba sence v navpični ravnini vzhod-zahod, vzporedni z (yz) ravnino, tako za $x = d$ dobi obliko:

$$\mathbf{(d^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = (d \cos \varphi + z \sin \varphi)^2}$$

3. Če pa si predstavljamo, da leži O na vrhu palice z dolžino a, ki jo navpično zapičimo v ekvatorialno ravnino tako, da je palica usmerjena proti severnemu nebesnemu polu, dobimo enačbo plašča krožnega dvojnega stožca s skalarnim produktom $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{f} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^\circ - \delta) = \sin \delta$ in hkrati z $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{f} = (0, 0, 1) \cdot (x, y, z)/r = z/r$. Torej je enačba plašča $z/r = \sin \delta$ oziroma:

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta$$

Enačba sence v ekvatorialni ravnini za $z = -a$ dobi najprej obliko: $a^2 = (x^2 + y^2 + a^2) \sin^2 \delta$ in končno:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = a^2/tg^2\, \delta;}\ \delta \neq 0$$

To pa je krožnica z radijem $R = a/\mathrm{tg}\, \delta$.

Zgledi:

Poglejmo, kakšno krivuljo popiše konec (vrh) sence ravne palice ob enakonočju ($\delta = 0$) pri nas ($\varphi = 45°$).

1. Na vodoravni ravnini izpeljemo, da je $(x \cos \varphi - v \sin \varphi)^2 = 0$, od koder sledi $x = v\, \mathrm{tg}\, \varphi$ = konstantno = v. To pa je premica, vzporedna z osjo y. Na ekvatorju ($\varphi = 0$) je ob enakonočju $x = 0$ in tako krivulja degenerira kar v os y, torej premico, ki poteka od zahoda proti vzhodu in gre skozi podnožišče palice in je pravokotna na poldnevnico.

2. Na navpični ravnini izpeljemo $(d \cos \varphi + z \sin \varphi)^2 = 0$ in $z = -d/\mathrm{tg}\, \varphi$ = konstantno = $-d$. To je premica, vzporedna z osjo y. Na ekvatorju je ta dan senca neopredeljena.

3. Na ekvatorialni ravnini je tega dne pot vrha sence palice neopredeljena, saj gre R v neskončnost, in to za vse $\varphi \geq 0$. Jeseni in pozimi pa senca palice sploh ne pade na ekvatorialno ravnino. V ostalih dneh, to je od spomladanskega do jesenskega enakonočja, se vrh sence palice giblje po krožnicah, od katerih doseže R minimum ob poletnem Sončevem obratu, ko je $R = a/\mathrm{tg}\, 23{,}5° \approx 2{,}3\, a$. V ostalih dneh je radij krožnice večji.

Zaključek:

V vseh primerih, razen ko gre za neopredeljenost, je krivulja, po kateri se giblje konec (vrh) sence od Sonca osvetljene ravne palice na vseh treh ravninah, stožnica, ki v posebnem, le enem primeru ($\delta = 0$) degenerira v premico.

Opomba:

To je moja edina tako pomembna intelektualna stvar, da sem se odločil, da jo zavarujem s ©. Saj sem izpeljavo enačbe sence odkril, prvo leta 1994, drugi dve pa leta 2017.

Moja zelo skrbna več kot enoletna opazovanja (da o drugih opazovanjih ne govorim) sence, ki jo navpična od Sonca osvetljena palica meče na vodoravno ravnino – leta 1994 v kraju Jošt nad Kranjem. Plastični beli jogurtovi lončki so razporejeni po treh hiperbolah in eni premici. Najbolj leva hiperbola prikazuje premikanje konca (vrha) sence palice blizu zimskega Sončevega obrata, desno od nje je hiperbola, ki prikazuje premikanje konca sence okoli 1. 11., premica prikazuje premikanje konca sence ob jesenskem enakonočju, najbolj desna hiperbola pa prikazuje premikanje konca sence palice natanko ob poletnem Sončevem obratu. Teorija se lepo ujema s prakso, to je z neposrednimi opazovanji sence palice na prostem, v naravi. – ***Presek*** **29 (2001/2002), številka 3 (naslovnica).**
Foto: Stana Prosen

Literatura:

M. Prosen, *Ukvarjanje s senco*, Presekova knjižnica **39**, DMFAS, Ljubljana 2003 in vsa tam citirana literatura.
M. Prosen, *Senca gnomona*, Spika **2**, 541, Ljubljana 1994 in tam vsi moji članki o senci.

Kranj – Zlato Polje, 5. avgusta 2017 ***Majo Prosen***