Pri pisanju o naših dveh astronomih in matematikih 17. stoletja, to je o Cergolu in Kobavu, sem naletel na znamenitega matematika Paula Guldina, ki ju je učil ali pa so tudi skupaj vsi trije poučevali matematiko na graški univerzi. Po Guldinu se imenujeta dve geometrijski pravili (izreka, tudi teorema), ki veljata za vrteča se (rotacijska) geometrijska telesa, to je za vrtenine. Ker gre za zanimivo in uporabno geometrijsko področje, sem o tem napisal kratek spis, v katerem opredelim, kaj sta Guldinovi pravili[1], pokažem tri zglede izračuna površine in prostornine vrtenin in predlagam še sedem domačih vaj za utrditev snovi. To snov ponavadi zvedo šele študenti na univerzi (1. letnik matematike, fizike, tehnike, itn.), vendar jo je mogoče pojasniti na srednješolski stopnji, celo tako preprosto, da jo lahko razume že osmošolec naše osnovne šole, če se le malo potrudi.

Paul Guldin in njegovi pravili

Rojen kot Habakuk v zlatarski družini židovskega rodu in protestantske vere je pri 20.-tih v Münchnu vstopil v jezuitski red in prevzel ime Paul. Šel je skozi dobro organizirano jezuitsko šolo in po nekaj letih postal jezuitski sholastik, pozneje pa tudi jezuitski duhovnik.

Ko si je pridobil dovolj matematičnega znanja, so ga leta 1609 poslali študirat na Rimski jezuitski kolegij (Collegium Romanum) v Rim k slavnemu profesorju matematike in astronomije Christopherju Claviusu (1538–1612), ki je bil odlični učitelj in pedagog, čeprav ni znan po kakšnih večjih matematičnih in astronomskih odkritjih. V Rimu je opravil tudi ustrezni teološki študij.

Po končanem študiju leta 1617 je najprej odšel na Jezuitski kolegij v Gradec, potem leta 1623 na Dunaj, kjer je bil profesor matematike na univerzi. Leta 1629 so ga poslali učit na Jezuitsko gimnazijo v Šlezijo. Po nekaj letih tamkajšnjega poučevanja se je vrnil na profesorsko mesto na Dunaj. Tu je bil do leta 1637, ko se je vrnil v Gradec, kjer je ostal do konca svojega življenja.

Njegovo glavno matematično-fizikalno delo je *Centrobaryca* (v 4 delih, ki so izhajali med letoma 1635 in 1641). V njem je med drugim objavil dve pravili oziroma dokazal dva izreka o izračunu površine in prostornine rotacijskih geometrijskih teles – vrtenin.

---

[1] Imenovani tudi Pappos-Guldinovi pravili, saj ju je delno poznal že starogrški geometer Pappos (Pappus, Pap) Aleksandrijski (ok. 290–ok. 350). Ker je pravili objavil v 17. stoletju pod svojim imenom, so ga menda nekateri celo obsojali plagiatorstva.

Pri pojasnjevanju Guldinovih pravil je treba najprej in predvsem povedati tole. Lik in vrtilna os, okrog katere se lik vrti, ležita v isti ravnini in vrtilna os ne sme sekati lika.

Prvo pravilo: površina vrtenine je enaka zmnožku obsega lika in dolžine poti težišča lika pri vrtenju lika okrog vrtilne osi (ki leži v ravnini lika, a ga ne preseka).

Drugo pravilo: prostornina vrtenine je enaka zmnožku ploščine lika in dolžine poti težišča lika pri vrtenju lika okrog vrtilne osi (ki leži v ravnini lika, a ga ne preseka).

Jezuit, matematik in astronom Paul (s krstnim imenom Habakuk) Guldin (Sankt Gallen, Švica, 1577 – Gradec, Avstrija, 1643).

Če označimo obseg lika s črko s, ploščino lika s črko S, razdaljo (oddaljenost) težišča T lika od vrtilne osi z r_T, je pot težišča lika, ki jo opiše (naredi) težišče pri vrtenju lika, enaka obsegu krožnice s polmerom r_T, to je $2\pi \cdot r_T$, ustrezna obrazca za izračun površine P in prostornine V vrtenine pa se zapišeta takole:

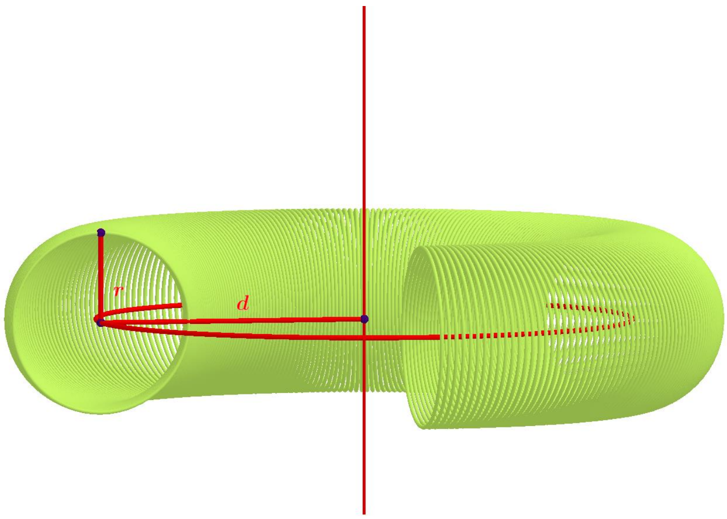
I. $\boldsymbol{P = s \cdot 2\pi \cdot r_T}$

II. $\boldsymbol{V = S \cdot 2\pi \cdot r_T}$

Guldinovi pravili sta geometrijski pravili, po katerih lahko iz gornjih obrazcev (enačb) preprosto izračunamo P in V določenih vrtenin, ne pa vseh. P in V vseh vrtenin pa lahko vedno izračunamo s sestavljanjem. En tak primer bomo pokazali tudi tu, da bomo na ta način potrdili pravilnost izračunov P in V vrtenin po Guldinu.

Zgledi

1. Tu gre za primer geometrijskega telesa, ki mu pravimo torus ali svitek (zračnica ali po domače šlauh). Nastane z vrtenjem krožnice okrog osi, ki leži v isti ravnini kot krožnica, a je ne preseka.



Izračun za površino torusa po gornjih podatkih je:

$$\boldsymbol{P = s \cdot 2\pi \cdot r_T = (2\pi r)\cdot(2\pi d) = 4\pi^2 rd}$$

Izračun za prostornino torusa po gornjih podatkih pa je:

$$\boldsymbol{V = S \cdot 2\pi \cdot r_T = (\pi r^2)\cdot(2\pi d) = 2\pi^2 r^2 d}$$

2. Kvadrat s stranico a se zavrti okrog osi, ki gre skozi oglišče kvadrata in je pravokotna na diagonalo kvadrata. Izračunajmo površino in prostornino tako nastale vrtenine. Skico naredite sami. Je preprosta.

Tu je $\boldsymbol{r_T = a\sqrt{2}/2;}$

$$\boldsymbol{P = s \cdot 2\pi \cdot r_T = (4a)\cdot(2\pi a\sqrt{2}/2) = 4\sqrt{2}\cdot\pi a^2} \text{ in}$$

$$\boldsymbol{V = S \cdot 2\pi \cdot r_T = (a^2) \cdot (2\pi a\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\cdot\pi a^3}$$

Zdaj pa še preskus, če smo prav izračunali. Pri vrtenju kvadrata okrog te osi nastaneta dva enaka stožca in dva enaka prisekana stožca, vsi z enako višino $a\sqrt{2}/2$, polmer stožca je $a\sqrt{2}/2$, polmera prisekanega stožca pa sta $a\sqrt{2}$ in $a\sqrt{2}/2$.

Površina vrtenine je enaka vsoti ploščin plaščev obeh stožcev: $P = 2 \cdot$ ploščina plašča stožca + 2 · ploščina plašča prisekanega stožca = $2\cdot (\pi\, ½\cdot a\sqrt{2}\cdot a + \pi\, (a\sqrt{2} + a\sqrt{2}/2)\cdot a) = \mathbf{4\sqrt{2}\cdot\pi a^2}$.

Prostornina vrtenine je razlika med dvema prostorninama prisekanega stožca in dvema prostorninama stožca: $V = 2 \cdot$ prostornina prisekanega stžca – 2 · prostornina stožca = $2\cdot(\pi\cdot a\sqrt{2}/6 \cdot(2a^2 + ½\, a^2 + a^2) - \pi\cdot a\sqrt{2}/6\cdot ½\, a^2) = \mathbf{\sqrt{2}\cdot\pi a^3}$.

3. Enakostranični šestkotnik s stranico *a* se zavrti okrog stranice. Skico naredite sami. Koliko je *P* in *V* vrtenine ?

Tu je $\boldsymbol{r_T = a\sqrt{3}/2}$;

$$\mathbf{P = s \cdot 2\pi \cdot r_T = (6a)\cdot(2\pi a\sqrt{3}/2) = 6\sqrt{3}\cdot\pi a^2} \text{ in}$$

$$\mathbf{V = S \cdot 2\pi \cdot r_T = (3a^2\sqrt{3}/2) \cdot (2\pi a\sqrt{3}/2) = 4{,}5\cdot\pi a^3}$$

Domače naloge

(Pri vseh nalogah uporabite Guldinovi pravili; o pravilnem rezultatu se lahko vedno prepričate s sestavljanjem posameznih delov vrtenine.)

1. Kvadrat z dolžino stranice *a* se zavrti okrog stranice. Izračunajte *P* in *V* tako nastale vrtenine.

2. Kvadrat s stranico *a* se zavrti okrog osi, ki je vzporedna s stranico in je od nje oddaljena za *a*. *P* in *V* vrtenine = ?

3. Enakostranični trikotnik s stranico *a* se zavrti okrog stranice. *P*, *V* = ?

4. Enakostranični trikotnik s stranico *a* se zavrti okrog osi, ki gre skozi oglišče trikotnika in je pravokotna na višino trikotnika. *P*, *V* = ?

5. Enakostranični trikotnik s stranico *a* se zavrti okrog osi, ki gre skozi oglišče trikotnika in je vzporedna z višino trikotnika. *P*, *V* = ?

6. Enakostranični 6-kotnik s stranico *a* se zavrti okrog osi, ki gre skozi oglišče šestkotnika in je pravokotna na 2*a*. *P*, *V* =?

7. Krožnica z radijem *a* se zavrti okrog tangente. *P* in *V* = ?

Sami si izmislite še kakšno težjo nalogo. Jih kar mrgoli.

Kranj – Zlato Polje, 21. julij 2018 ***Majo Prosen***