***Ravninske like je mogoče sestavljati v ravninske vzorce najrazličnejših oblik in velikosti. Tako na primer iz ploščinsko skladnih (enakih) krogov ali ploščinsko skladnih (enakih) kvadratov lahko oblikujemo križe. Tu se omejimo le na take križe, ki so sestavljeni samo iz enakih kvadratov ali samo iz enakih krogov, ali pa so včasih skombinirani iz obeh likov, so pa vsi osno in središčno simetrični. Vsak križ obravnavamo posebej, kakor je pač opredeljen (definiran), in izračunamo zahtevano.***

# Trije geometrijski križi

**Naloge so primerne že za osmošolce osnovne šole.**

Navajamo tri primere križev. Računamo njihove ploščine in obsege. Gremo od preprostega (lažjega) do zahtevnejšega (težjega) primera. Gre za rahle raziskovalne naloge. Zato po besedilu naloge obvezno narišete ustrezno skico križa, da boljše razumete vsebino in potek reševanja posamezne naloge. Brez skic nalog ni mogoče rešiti.

## ***Prvi križ***

Kvadratu s stranico $a$ izrežemo štiri polkroge, od katerih ima vsak središče v razpolovišču ene stranice, polmer $r$ pa je enak eni četrtini dolžine stranice $a$. Izračunajmo ploščino $S$ in obseg $s$ tako nastalega križa. Obvezna je skica!

Rešitev:

Ploščino križa izračunamo, da od ploščine kvadrata $a^2$ odštejemo štiri ploščine polkrogov (dve ploščini krogov) z radijem $r = \frac{1}{4} a$, torej $S = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 = a^2 - \pi \cdot a^2/8 = a^2 (1 - \pi/8) = 61\ \% \cdot a^2$. Ploščina križa predstavlja 61 % ploščine kvadrata.

Obseg je $s = 4 (a/2 + \pi r) = 4 (a/2 + \pi \cdot a/4) = a (2 + \pi) = 5{,}14\ a$. Obseg križa je večji od obsega kvadrata $4a$ in predstavlja $5{,}14/4 = 1{,}29$ obsega kvadrata, kar pove, da je za 29 % večji od obsega kvadrata.

## ***Drugi križ***

Krogu z radijem $r$ včrtamo pet ploščinsko skladnih (enakih) kvadratov s stranico $a$ tako, da oblikujejo križ. Trije kvadrati so vodoravno, trije navpično, središče notranjega kvadrata pa se ujema s središčem kroga. Štirje kvadrati so torej položeni ali pripeti na štiri stranice petega (notranjega) kvadrata. Izračunajmo ploščino $S$ in obseg $s$ tako nastalega križa. Obvezna je skica!

Rešitev:

Iz skice izpeljemo zvezo med radijem $r$ kroga in stranico kvadrata $a$: $r^2 = (a/2)^2 + (3a/2)^2 = 5a^2/2$ in $a^2 = 2\ r^2/5$.

Ploščina križa je $S = 5\ a^2 = 2\ r^2$. Rezultat je zelo zanimiv. Pove, da je ploščina tega križa enaka ploščini krogu včrtanega kvadrata, katerega stranica je $a = r\ \sqrt{2}$ in ploščina seveda $a^2 = 2\ r^2$. Ploščina križa predstavlja $2\ r^2/\pi\ r^2 = 2/\pi =$ 64 % ploščine kroga.

Obseg križa je $s = 12\ a = 12 \cdot \sqrt{10}\ r\ /5$. Poglejmo, kolikšen je obseg križa glede na obseg kroga $2\pi r$. Predstavlja $(12 \cdot \sqrt{10}\ r\ /5)/2\pi r = 6 \cdot \sqrt{10}\ /5\pi = 1{,}21$ obsega kroga ali obseg križa je za 21 % večji od obsega kroga.

## ***Tretji križ***

Kvadratu z dolžino stranice $a$ vzdolž diagonal včrtamo pet ploščinsko skladnih (enakih) krogov z radijem $r$ tako, da oblikujejo križ. Trije krogi naj bodo vodoravno, trije navpično, središče notranjega (petega) kroga pa naj se ujema s središčem kvadrata. Štirje krogi, ki se dotikajo stranic kvadrata, se dotikajo tudi notranjega kroga. Izračunajmo ploščino $S$ in obseg $s$ tako nastalega križa. Obvezna je skica!

Rešitev:

Iz skice izpeljemo naslednjo zvezo med radijem $r$ kroga in stranico $a$ kvadrata: $6r + 2\ (r\sqrt{2} - r) = a\sqrt{2}$ in (po racionalizaciji) $r = ½\ (a\sqrt{2} - a)$.

Ploščina križa je $S = 5\pi\ r^2 = 5\pi \cdot (½\ (a\sqrt{2} - a))^2 = 5\pi\ a^2\ (3 - 2\sqrt{2})/4$ in predstavlja: $(5\pi\ a^2\ (3 - 2\sqrt{2})/4)/a^2 = 5\pi\ (3 - 2\sqrt{2})/4 =$ 67 % ploščine kvadrata.

Obseg križa je $s = 5{\cdot}2\pi r = 5{\cdot}2\pi\ (½\ (a\sqrt{2} - a)) = 5\ \pi \cdot a\ (\sqrt{2} - 1)$. Obseg križa glede na obseg kvadrata $4a$ pa predstavlja $5\pi a\ (\sqrt{2} - 1)/4a = 5\pi\ (\sqrt{2} - 1)/4$ $=1{,}63$ in je kar za 63 % večji od obsega kvadrata.

Pripomba!

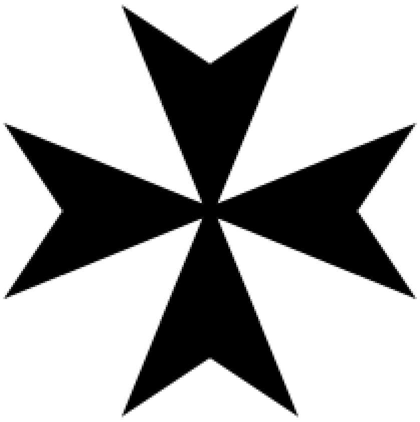
Pri drugemu in tretjemu križu lahko včrtamo vedno samo liho število enakih kvadratov v krog oziroma liho število enakih krogov v kvadrat, in sicer 4n + 1, če je n = 1, 2, 3, … (naravno število); to je, včrtamo 5, 9, 13, 17, 21, …, manjših likov. Čim večje je naravno število n, več manjših likov lahko včrtamo v večji lik, kar pove zdrava pamet.

Razmislite, kolikšna sta ploščina in obseg drugega in tretjega križa, če gre število včrtanih manjših likov v večji lik v neskončnost. Kaj v tem primeru postanejo včrtani liki? Ali drugače vprašajmo, v kaj degenerirajo včrtani liki? Kolikšna sta ploščina in obseg teh dveh degeneriranih križev?

Nalogi:

1. V kvadrat s stranico a vzdolž diagonal včrtajte križ, sestavljen iz petih ploščinsko enakih (skladnih) manjših kvadratov s stranico b. Izračunajte S in s križa!

2. V krog z radijem R včrtajte križ, sestavljen iz petih ploščinsko enakih (skladnih) manjših krogov z radijem r. Izračunajte S in s križa!?



**Malteški križ; poskusite ga opredeliti (definirati) in izračunati *S* in *s*,**

***Kranj – Zlato Polje, 27. september 2018*** **Majo Prosen**