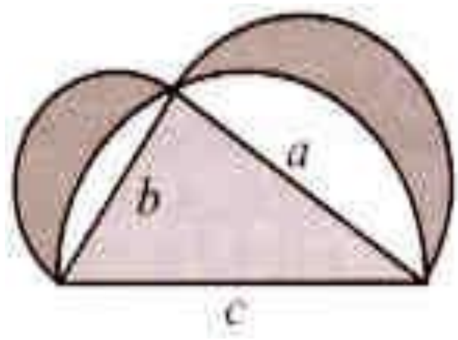
Marsikdo pozna številne značilnosti, ki veljajo v pravokotnem trikotniku (na primer Pitagorov, Evklidov in višinski izrek, komplementarnost notranjih kotov ob hipotenuzi, kje leži središče trikotniku očrtanega kroga in dr.). Večkrat je tudi že reševal razne naloge o pravokotnem trikotniku, in vendar ne pozna posebne značilnosti, o kateri bomo spregovorili v tem spisu. Tudi jaz v srednji šoli še nisem vedel za njo. Poglejmo, za kakšno zanimivo značilnost pravokotnega trikotnika gre.

Skrita stara zanimivost o pravokotnem trikotniku

(Za raziskovanje primerno že za osmi razred osnovne šole.)

To zanimivo značilnost, ki na splošno ni znana, bomo spoznali po reševanju naslednje razmeroma preproste in razumljive naloge.

Imamo pravokotni trikotnik s katetama a in b in hipotenuzo c (slika 1). Nad katetama konstruirajmo polkroga. Od tako povečanega trikotnika odrežimo polkrog nad hipotenuzo. ***Ploščina ostanka*** (to je vsota ploščin obarvanih krajcev (oz. "lunic") nad katetama) ***je enaka ploščini prvotnega pravokotnega trikotnika***. Dokažimo!



Slika 1.

Predno se lotimo tega dokaza, najprej povejmo bistveno o ploščini pravokotnega trikotnika. Ploščina pravokotnega trikotnika je ali ½ ab ali ¼ c^2 sin α, če kot α oklepata polovični stranici c (½ c), ki izhajata iz vrha v središču S hipotenuze, en krak tega kota kaže v oglišče C pravega kota, drugi krak pa v oglišče A ali pa v oglišče B (kot < CS A ali kot < CSB; označite točke A, B, C in S na sliki, da boste lažje sledili razlagi in razumeli dokaz).

Gornjo trditev bomo dokazali na dva načina.

● *Prvi način*.

Ploščina ostanka = ploščina prvotnega pravokotnega trikotnika + ploščina polkroga nad kateto a + ploščina polkroga nad kateto b – ploščina polkroga nad hipotenuzo c.

Ploščina ostanka = ½ ab + ½ π a^2/4 + ½ π b^2/4 – ½ π c^2/4 = ½ ab + π/8 (a^2 + b^2 – c^2) = ½ ab. Izraz v oklepaju je namreč nič, saj je a^2 + b^2 = c^2 in a^2 + b^2 – c^2 = 0 (Pitagorov izrek).

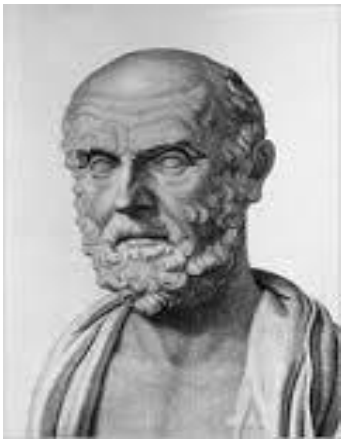
Ploščina ostanka je enaka ploščini prvotnega pravokotnega trikotnika, to ***je ½ ab***.

●● *Drugi način***. (* pomeni težjo vsebino, recimo od 2. letnika srednje šole dalje, vendar jo prizadevni osmošolec z nekoliko zavzetosti hitro obvlada)

Zdaj bomo dokazali, da je vsota ploščin obarvanih krajcev nad obema katetama enaka ploščini prvotnega pravokotnega trikotnika, to je ¼ c^2 sin α.

Ploščina obarvanega krajca nad kateto a je ploščina polkroga nad kateto a – ploščina (belega) odseka nad kateto a, torej ½ π a^2/4 – (παc^2/4·360° – c^2 sin α/8), ploščina obarvanega krajca nad kateto b pa je ploščina polkroga nad kateto b – ploščina (belega) odseka nad kateto b, torej ½ π b^2/4 – (π(180°–α)c^2/4·360° – c^2 sin (180°– α)/8). Njuna vsota pa je π a^2/8 + π b^2/8 – πc^2/4·360°· (α + 180° – α) + c^2 (sin α + sin α)/8) = π a^2/8 + π b^2/8 – πc^2/8 + ¼ c^2 sin α = ¼ c^2 sin α (saj je π a^2/8 + π b^2/8 – πc^2/8 = 0; gl. prvi način). Tako smo elegantno ugotovili, da je ***vsota ploščin obarvanih krajcev nad obema katetama enaka*** ploščini prvotnega pravokotnega trikotnika ***¼ c^2 sin α***.

Oba načina dokaza sta enakovredna, saj z njima isto dokažemo. Le drugi je nekoliko zahtevnejši. Moramo poznati trigonometrično obliko za ploščino pravokotnega trikotnika in znati izračunati ploščino krožnega odseka. To skrito zakonitost je ugotovil starogrški matematik Hipokrat iz Iosa.

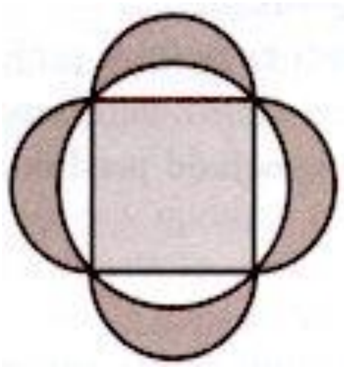


Slika 2. Hipokrat (Hippokrates; otok Ios, Jonija, okoli 470–Atene, okoli 410 pr. n. št.), starogrški matematik (geometer), astronom in filozof. Ne smemo ga zamenjati z nekoliko mlajšim zelo slavnim starogrškim zdravnikom Hipokratom s Kosa (ok. 460–380 pr. n. št.).

Naloge:

1. Narišite pravokotni trikotnik, označite vse stranice, točke in kote, navedene v tekstu in ponovite oba načina dokaza za dani primer.

2. Kvadrat povečajmo za štiri polkroge nad stranicami. Od dobljenega lika odrežimo kvadratu očrtani krog (slika 3). Dokažite, da je ploščina ostanka enaka ploščini prvotnega kvadrata. Še drugače formulirajte stavek za ta dokaz.

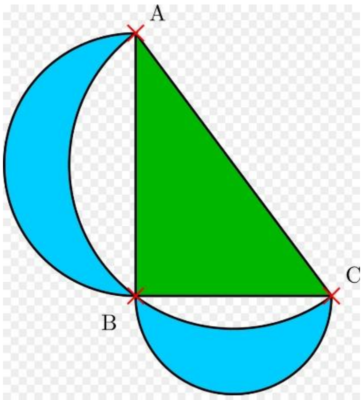


Slika 3.

3. Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$ tudi pove, da je vsota ploščin polkrogov nad katetama enaka ploščini polkroga nad hipotenuzo. Razmislite o tem!

4. Kaj pa to pomeni: $\frac{1}{4}\sqrt{3}\, a^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\, b^2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}\, c^2$? Zapis povejte z besedami, lahko pa ga tudi še narišite!

5. Poglejte sliko 4! Povejte z besedami, kaj prikazuje. Komentirajte!



Slika 4.

6. Izdelajte referat o življenju in delu znamenitega matematika Hipokrata.

Kranj - Zlato Polje, 30. novembra 2018 *Majo Prosen*