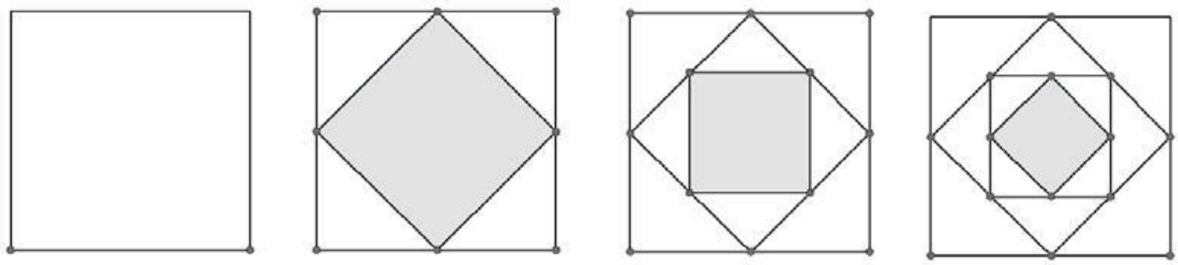
V tem spisu na kratko obdelamo srednješolsko snov (ki jo ob primernem prizadevanju lahko razume že osnovnošolec osmega razreda) o seštevanju obsegov in ploščin likov, ki jih včrtamo v dani lik in se ti liki po določenem pravilu vse bolj manjšajo (obsegi in ploščine likov gredo proti nič). Število včrtanih likov gre v neskončnost, vsote obsegov in vsote ploščin teh včrtanih likov pa zavzamejo končno vrednost. Gre za temeljno nalogo reševanja takih primerov. Na osnovi tega primera rešujemo podobne druge.

Neskončno dâ končno

(Samo malo za pokušino in nič več.)

Vzemimo naslednjo zelo zanimivo in tudi poučno geometrijsko nalogo.

Izračunajmo vsoto vseh obsegov in vsoto vseh ploščin pokončnih (ne poševnih) kvadratov, ki jih zaporedoma včrtamo v prvi kvadrat na levi, kot kaže spodnja slika, če je a dolžina stranice prvega kvadrata. Pri računu vedno upoštevamo tudi prvi kvadrat. (Op.: Kvadrati so včrtani po določenem pravilu, ki ga moramo sami ugotoviti, se enakomerno manjšajo (gredo proti nič), včrtamo jih neskončno, iskani vsoti pa zavzameta vedno končno vrednost.)



Od leve proti desni - v prvi kvadrat (levo) zaporedoma včrtamo vse manjše kvadrate; prvi kvadrat ima dolžino stranice a, drugi kvadrat ima dolžino stranice ½ a √2, tretji ½ a, četrti ¼ a√2, … (pravilo, na kakšen način se kvadrati manjšajo, smo že ugotovili). Zaporedoma včrtani kvadrati se vse bolj manjšajo. Njihovi obsegi in ploščine gredo proti nič. Vsota vseh njihovih obsegov in vsota vseh njihovih ploščin pa zavzame končno vrednost. Poglejmo, kako pridemo do rešitve take naloge.

Rešitev:

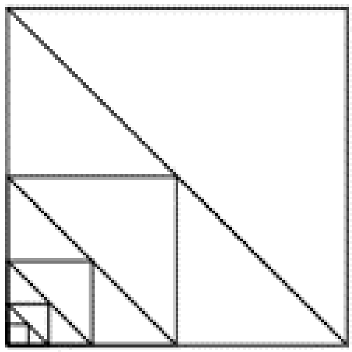
Vsoto s izračunamo po obrazcu $s = a_1/(1 – k)$, kjer a_1 pomeni prvo vrednost dane količine (pri nas je to kar obseg prvega kvadrata na levi $a_1 = 4a$), k pa je razmerje (kvocient) dveh enakovrednih zaporednih sosednih količin, prve naslednje in prvotne, ali druge naslednje in prve naslednje, če gre za pravilno zmanjševanje lika po določenem (izbranem) pravilu, ki ga ugotovimo oz. poznamo[1]. To razmerje je vedno med 0 in 1. Pri nas je $k = 4·½ a/4a = ½$. Tako je vsota vseh obsegov včrtanih kvadratov $s = 4a/(1 – ½) = 8a$. Pri vsoti vseh ploščin včrtanih kvadratov je prva vrednost ploščine a^2, druga vrednost ploščine $(½ a)^2 = ¼ a^2$, kvocient pa $k = ¼ a^2/a^2 = ¼$ in $s = a^2/(1 – ¼) = 4 a^2/3$.

Če računamo vsoto obsegov in vsoto ploščin vseh zaporedoma včrtanih kvadratov, je pri obsegih $k = 4· ½ a\sqrt{2}/4a = ½ \sqrt{2}$, pri ploščinah pa $k = ½ a^2/a^2 = ½$. Tako je vsota vseh včrtanih obsegov kvadratov $s = 4a/(1 – ½ \sqrt{2}) = 4a (2 + \sqrt{2})$ in vsota vseh včrtanih ploščin kvadratov $s = a^2/(1 – ½) = 2a^2$.

V drugem primeru dobimo obakrat večjo vrednost vsot kot v prvem (pojasnite, zakaj).

Naloge:

1*. V spodnji sliki izračunajte vsoto vseh obsegov in vsoto vseh ploščin enakokrakih pravokotnih trikotnikov, ki ležijo znotraj kvadrata s stranico a in imajo prave kote obrnjene v desno!



Enakokraki pravokotni trikotniki se v levo vse bolj manjšajo (obsegi in ploščine trikotnikov gredo proti nič), vsota njihovih obsegov in vsota njihovih ploščin pa zavzame končno vrednost.

[1] Ta obrazec izpeljemo iz vsote s za prvih n-členov geometrijskega zaporedja, ki ima enačbo $s = a_1· (k^n – 1)/(k – 1)$, kjer je a_1 prvi člen zaporedja, k pa je kvocient; če je k med 0 in 1 (padajoče geometrijsko zaporedje) in gre število n v neskončnost, gre potenca k^n proti nič (→ 0) in enačba dobi obliko $s = a_1·/(1 – k)$.

2*. Izračunajte vsoto vseh obsegov kvadratov in vsoto vseh ploščin kvadratov, ki se na zgornji sliki manjšajo! Upoštevate seveda obseg in ploščino prvotnega kvadrata.

3. Izračunajte vsoto: a) 1 + 1/2+ 1/4+ 1/8 + … ; b) 1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + … ; c) 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + …. Koliko je vsakič kvocient k? Kaj opazite pri vrednostih vsot teh števil? Kako so odvisne od k?

Kranj – Zlato Polje, 10. decembra 2018 ***Majo Prosen***