Svojevrstno lepoto in posebno zadovoljstvo lahko včasih doživimo tudi ob reševanju kakšne zanimive, nenavadne in duhovite matematične naloge, ki človeka posebno pritegne in miselno zaposli. Tale tukaj se mi zdi ena takšna.

Trikotnik v kvadratu

Raziskovalna naloga, primerna že za naše devetošolce. Predpostavljamo, da kotne funkcije poznajo in jih obvladajo. Sicer rešujejo tiste dele naloge, ki ne vključujejo kotnih funkcij.

V notranjosti kvadrata ABCD z dolžino stranice a narišemo enakostranični trikotnik ABE, kot prikazuje slika.

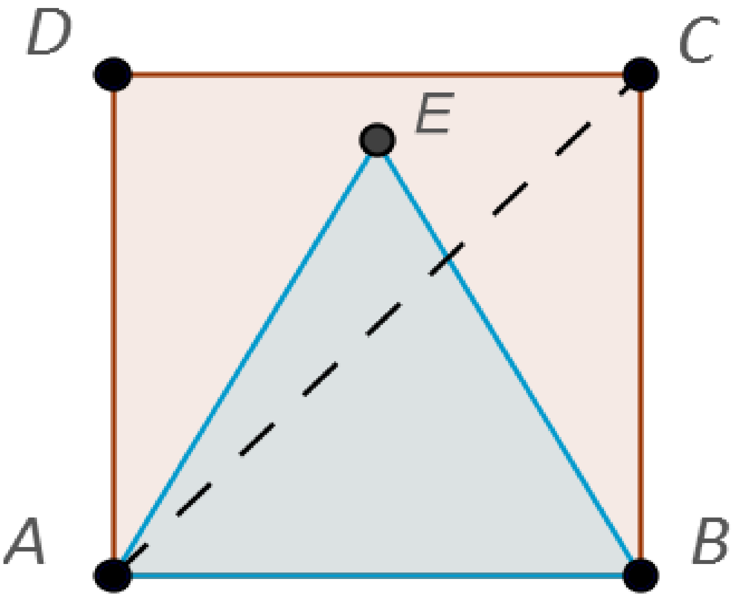
a) Izračunajmo oddaljenost oglišča E trikotnika od oglišč C in D kvadrata!

b) V kolikšnem kotu je iz oglišča E vidna stranica CD kvadrata?

c) Koliko meri kot med diagonalo AC kvadrata in stranico BE trikotnika, ki se sekata?

č)* V oglišču E postavimo pravokotnico EF = a na ravnino kvadrata ABCD. Tako dobimo kvadratno piramido z osnovno ploskvijo ABCD, vrhom F in višino v = EF = a. Kolikšna sta naklonska kota stranskih ploskev ABF in CDF proti osnovni ploskvi piramide ABCD? V kolikšnem kotu je iz vrha F piramide vidna stranica kvadrata S_1S_2 pri pravokotnem pogledu na osnovno ploskev?

d) Nalogo lahko tudi vi poljubno razširite z novimi vprašanji (gl. domačo nalogo!).



Sliko sproti dopolnjujte v skladu s tekstom, da boste (bolje) razumeli nalogo.

K a)

Naj pravokotnica iz E na AB seka AB v točki S_1, pravokotnica iz E na CD pa seka CD v točki S_2! Tako je $ES_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$ in $ES_2 = a - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = a\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Razdaljo EC = ED označimo z x. Po Pitagorovem izreku je:
$x^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + a^2\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = a^2\,(2 - \sqrt{3})$ in $x = a\,\sqrt{(2 - \sqrt{3})} \approx 0{,}52\,a$.

Oddaljenost oglišča E trikotnika od oglišč C ali D kvadrata je približno 0,52 a, to je le malo več, kot je polovica stranice kvadrata. (Komentirajte rezultat!)

K b)

Označimo kot < CED z α, potem je kot < S_2EC = kot < S_2ED = $\frac{1}{2}\alpha$ in $\mathrm{tg}\,(\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}a/a\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1/(2 - \sqrt{3}) \rightarrow \frac{1}{2}\alpha = 75°$ in $\alpha = 150°$.

Stranica kvadrata a = CD je iz E vidna v kotu 150°.

K c)

Kot je 75° (na pamet).

K č)*

Naklonska kota stranskih ploskev ABF in CDF proti osnovni ploskvi piramide ABCD naj bosta β in δ. Tako je $\mathrm{tg}\,\beta = a/\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a \rightarrow \beta = 49{,}1°$ in $\mathrm{tg}\,\delta = a/a\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \rightarrow \delta = 82{,}4°$.

Kot < S_1FS_2, v katerem je iz vrha piramide F vidna stranica kvadrata pri pravokotnem pogledu na ravnino kvadrata ABCD, je $180° - (\beta + \delta) = 48{,}5°$.

Domača naloga*.

1. Izračunajte razdalje vrha F piramide od oglišč A, B, C in D! Od katerih oglišč je vrh F piramide enako oddaljen?
2. Izračunajte naklonske kote stranskih robov piramide proti osnovni ploskvi, to je kote: < EAF = < EBF in < ECF = < EDF!
3.** Poskusite izdelati papirnati model te piramide, če je a = 2 dm!
4.** Poskusite izračunati površino in prostornino tako nastale piramide ABCDF.

Kranj, 11. januar 2019 ***Majo Prosen***